Mécanique

Plan

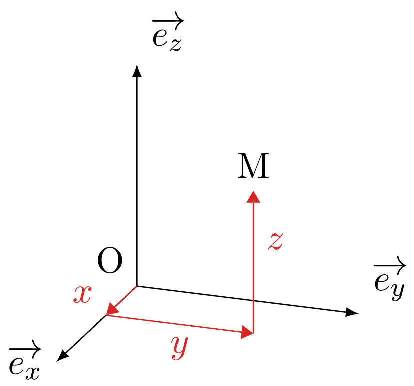
I Cadre général de la mécanique du point

A Cinématique

- En mécanique du point, un système de masse m est modélisé par un point M (de même masse m), situé en son **centre de gravité**.

- On repère ce point dans un système de coordonnées, parmi les suivants :

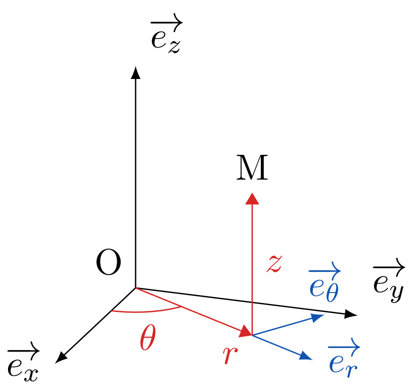
Coordonnées cartésiennes :



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

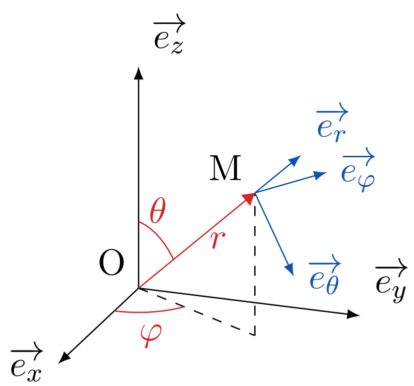
Coordonnées polaires (cylindriques) :



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r}\,(+z\,\overrightarrow{e_z})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques :



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

- Alors on peut définir la **vitesse** $\overrightarrow{v}$ et son accélération $\overrightarrow{a}$ comme d'un point comme

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$
$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\overrightarrow{v}} = \ddot{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

- Pour dériver ces vecteurs dans les autres systèmes de coordonnées, on écrit les changements de bases. Prenons l'exemple des coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \dot{\overrightarrow{e_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

- On peut alors caractériser certaines trajectoires :

  Mouvement rectiligne uniforme $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

  Mouvement circulaire En coordonnées polaires :

$$\dot{r} = 0 \implies \overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \implies \overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

  Mouvement circulaire uniforme En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \implies \overrightarrow{v} = \underbrace{r\dot{\theta}}_{v}\,\overrightarrow{e_\theta} \implies \overrightarrow{a} = \underbrace{-r\dot{\theta}^2}_{-v^2/r}\,\overrightarrow{e_r}$$

- La quantité cinématique qui résume le mouvement de l'objet est la **quantité de mouvement** :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$$

B Dynamique

- **Référentiel Galiléen :** Il s'agit d'un référentiel privilégié, dans lequel les loi énoncées ci-dessous peuvent s'appliquer.

Lois de Newton :

1. Deux référentiels galiléens sont en **mouvement rectiligne uniforme** l'un par rapport à l'autre
2. La quantité de mouvement peut être modifiée par ce qu'on appelle des **forces** $\overrightarrow{F}$ (**Unité :** $\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$), selon la loi
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$$
Cette loi est souvent appelée **principe fondamental de la dynamique** (PFD).
3. Si un système A exerce une force sur B, alors B exerce sur A une force opposée :
$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

- Voici quelques exemples de forces :

Force gravitationnelle d'un objet de masse M placé en l'origine d'un repère sphérique :

$$\overrightarrow{F_{grav}} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Avec $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$ la constante universelle de gravitation.

Poids d'un objet à la surface de la Terre, dirigé vers le sol

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$$

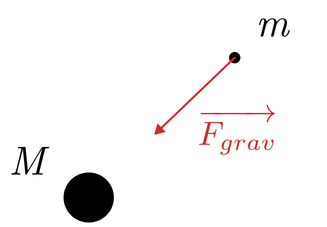
Avec $||\overrightarrow{g}|| = 9.81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur. Il s'agit en réalité de la force gravitationnelle, simplifiée lorsque l'on se place à la surface terrestre.

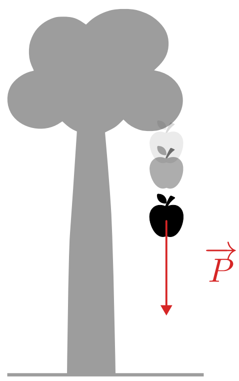
Force de rappel d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, étirer de l selon l'axe $(\mathrm{O}x)$:

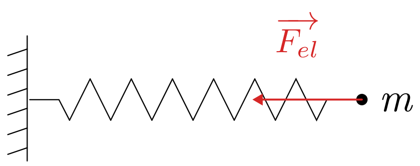
$$\overrightarrow{F_{el}} = -k\,(l - l_0)\,\overrightarrow{e_x}$$

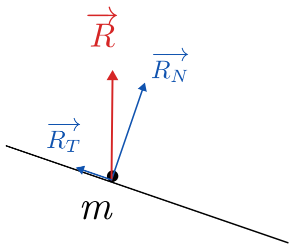
Réaction d'un support sur un objet posé dessus. On peut la décomposer en une partie normale et une partie tangentielle, mais il n'existe pas de formule générale pour l'exprimer. Il faut appliquer le PFD pour la trouver.

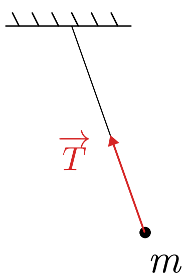
Tension d'un fil sur un objet suspendu. On sait simplement que cette force est dirigée dans l'axe du fil, de même que précédemment, son expression dépend du contexte, et est trouvable avec le PFD.

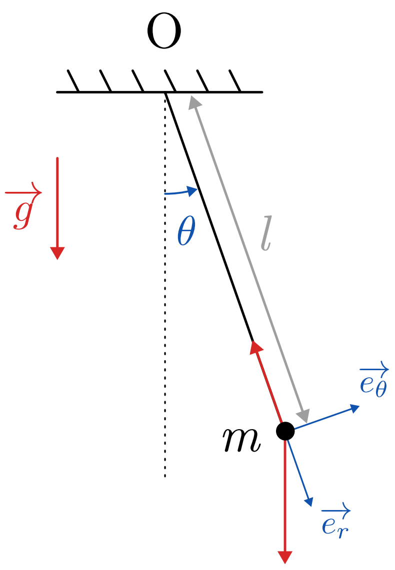












Exemple du pendule simple :

Système : Masse m au bout du fil

Référentiel : Terrestre (supposé galiléen)

Bilan des forces :

- **Poids :** $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$
- **Tension du fil :** $T = -T\,\vec{e_r}$

On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique (PDF) :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Or ici le mouvement est circulaire puisque le fil reste tendu de longueur l. Donc on peut écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = l\,\vec{e_r} \implies \vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \implies \vec{a} = -l\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + l\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

Alors la projection du PFD selon le vecteur unitaire $\vec{e_\theta}$ donne

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

C Énergie

- On peut multiplier le PFD par la vitesse $\vec{v}$ (produit scalaire), afin de faire apparaître un bilan de puissance :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$
$$m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

- Alors on appelle **énergie cinétique** le terme

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

Et **puissance d'une force** $\vec{F}$ la grandeur

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

- Notre expression prend alors la force du **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$$

- On peut ensuite s'intéresser à l'effet d'une force pendant un temps élémentaire $\mathrm{d}t$ et étudier la petite variation d'énergie cinétique $\mathrm{d}E_c$ qui en découle. Il suffit pour cela de multiplier l'équation précédente par $\mathrm{d}t$:

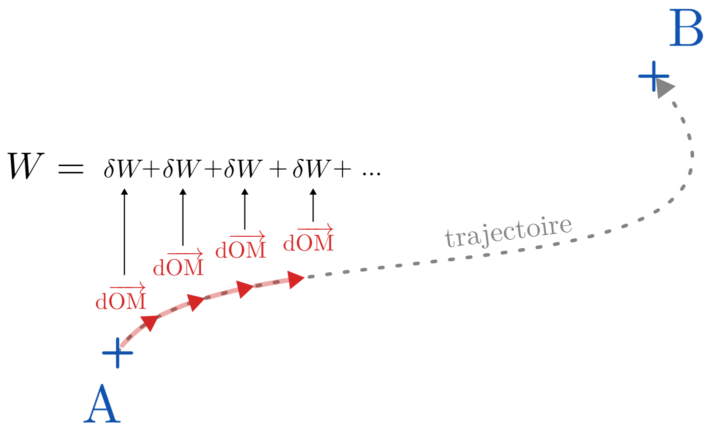
$$\mathrm{d}E_c = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

On appelle alors **travail élémentaire** de la force $\overrightarrow{F}$ cette quantité

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \implies \mathrm{d}E_c = \delta W$$

- Ceci est une expression élémentaire, c'est-à-dire décrivant un court instant $\mathrm{d}t$. Pour obtenir le **travail total** d'un force le long d'une trajectoire, il faut sommer tous ces petits travaux δW :

$$W = \int_{\text{trajectoire}} \delta W$$



- On peut alors intégrer la dernière équation le long de la trajectoire :

$$\mathrm{d}E_p = \delta W \underset{\int}{\implies} \Delta E_c = W$$

Cette nouvelle loi est appelée **théorème de l'énergie cinétique**. Son interprétation est simple : une variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces.

- *A priori*, le travail d'une force dépend donc de la trajectoire.
- Il existe cependant un certain type de force très particulier pour lesquelles cela n'est pas le cas : les **forces conservatives**. Leur travail ne dépend alors que des états initial A et final B, pas du chemin suivi !

On peut alors leur associer une quantité appelée **énergie potentielle**, notée E_p de sorte que

$$W = -\Delta E_p = -(E_p(\mathrm{B}) - E_p(\mathrm{A}))$$

- Pendant un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, cela revient à écrire que

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\mathrm{d}E_p$$

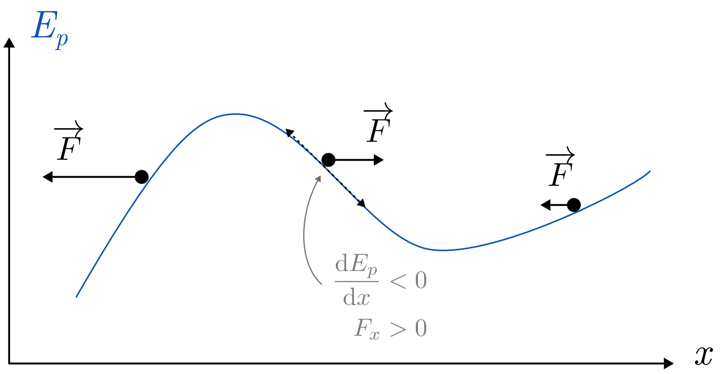
En 1D on a $\overrightarrow{F} = F_x\,\overrightarrow{e_x}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x}$

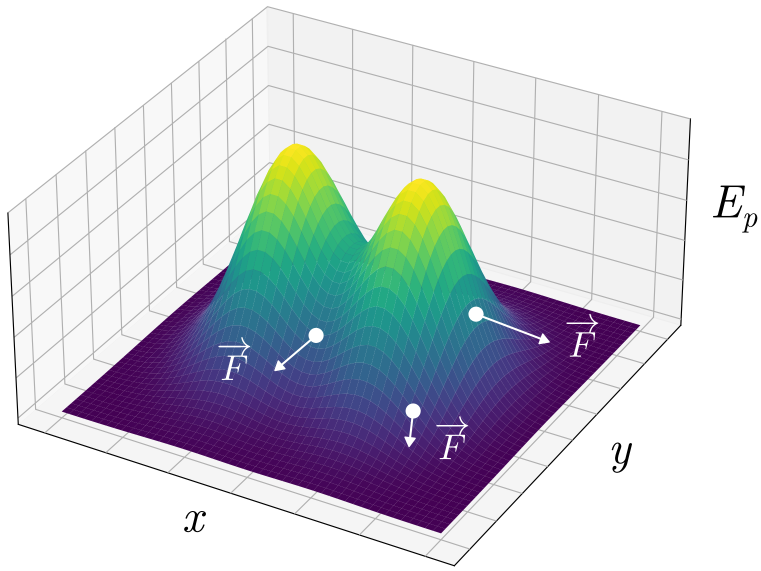
$$\implies F_x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p \implies F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \implies \overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_x}$$

- On trouve une intuition graphique à cette dernière expression, grâce à l'exemple de la pesanteur :

$$\overrightarrow{F} = -mg\,\overrightarrow{e_z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(mgz)\,\overrightarrow{e_z} \implies E_p = mgz$$

Donc en fait le profil $E_p(x)$ a la même forme que le profil $z(x)$. Alors la relation précédente traduit simplement le fait qu'une balle posée sur un relief $z(x)$ cherchera toujours à descendre la pente de $E_p(x)$.





- On peut généraliser cette expression en 3D :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_x} - \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y}\,\overrightarrow{e_y} - \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\,\overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p$$

Le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p$ en un point M est un vecteur dont

  - Le sens et la direction suivent la montée de E_p
  - La norme indique la valeur de la pente (raide ou douce)

Ainsi la force pousse dans le sens opposé, c'est-à-dire vers la diminution de E_p.

- Lorsqu'il y a des forces conservatives, on a vu que l'on pouvait écrire $W = \Delta E_p$ entre deux points A et B, donc le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_p + W_{nc}$$

Avec W_{nc} le travail des forces non-conservatives. On définit alors l'**énergie mécanique** du système

$$E_m = E_c + E_p$$

De sorte que

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

Il s'agit du **théorème de l'énergie mécanique** : une variation de l'énergie mécanique est due au travail des forces non-conservatives.

- On remarque alors que l'on peut définir les états d'équilibre de manière énergétique. Le système est dit **en équilibre** si la résultante des forces qu'il subit est nulle :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p = \overrightarrow{0} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ en 1D}\right)$$

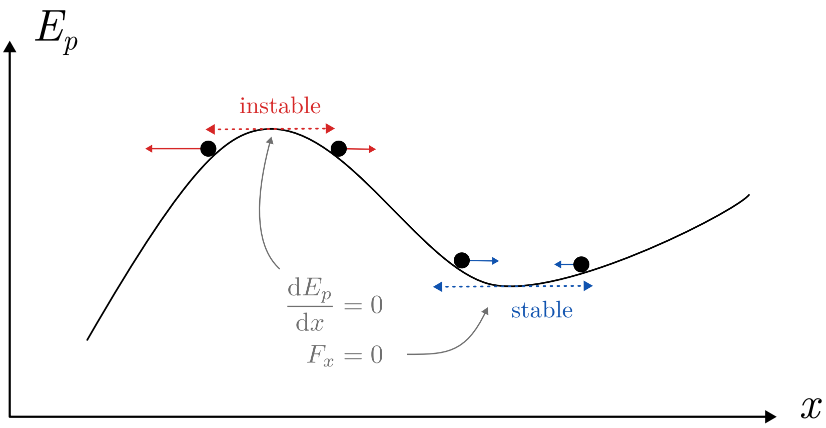
- Ceci peut se vérifier
  - soit en minimum de $E_p \to$ **équilibre stable**

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

  - soit en un maximum de $E_p \to$ **équilibre instable**

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0$$

La stabilité d'une position d'équilibre (resp. d'instabilité), traduit simplement le fait qu'en écartant légèrement le système de cette position, celui-ci subira une force qui l'y ramènera (resp. l'en éloignera).



- Autour d'une position d'équilibre stable x_0, on peut approximer le profil $E_p(x)$ par une parabole (développement limité à l'ordre 2) :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0) \underbrace{\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$

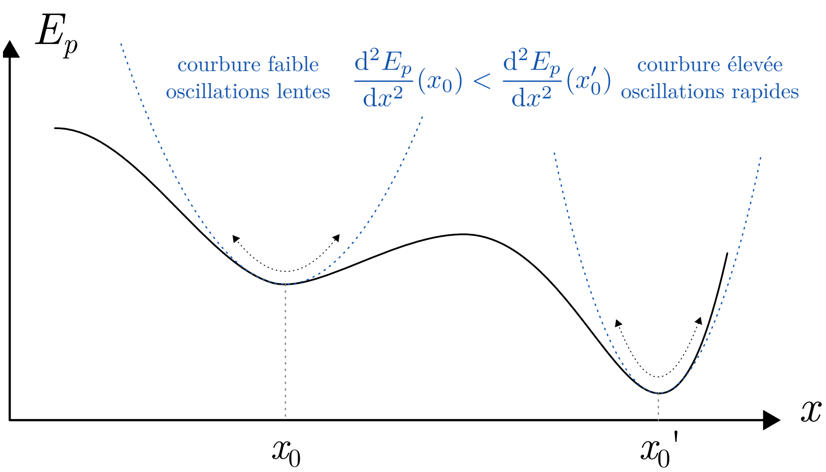
En posant $k = \dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$, on a alors

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) \qquad \text{(équation d'un ressort)}$$

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2\, x = {\omega_0}^2\, x_0 \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique, ce qui veut dire que le système oscille autour de sa position d'équilibre x_0 avec une pulsation ω_0 d'autant plus grande que la courbure de $E_p(x)$ est élevée.



D Moment cinétique

- Cette fois-ci, au lieu de faire un produit scalaire entre le PFD et la vitesse $\overrightarrow{v}$, on fait un produit vectoriel avec la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F} \qquad \text{car } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

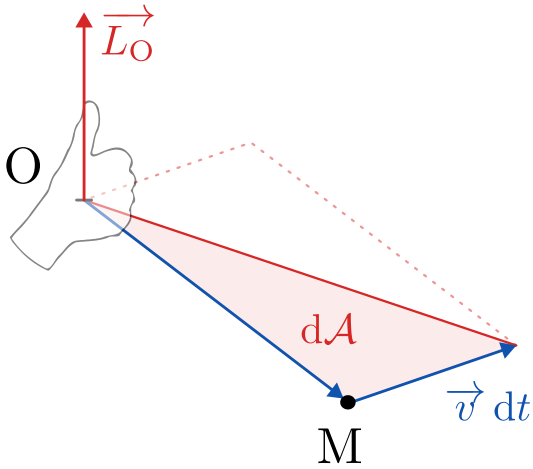
- Alors on appelle **moment cinétique en** O le vecteur

$$\overrightarrow{L_\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v}$$

Et **moment d'une force** $\overrightarrow{F}$ **en** O le terme

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F}$$

NB : ces grandeurs dépendent du choix du point O !



- La norme de $\overrightarrow{L_\mathrm{O}}$ nous renseigne sur l'aire balayée par $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par unité de temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}||\overrightarrow{L_\mathrm{O}}||$$

- Notre expression prend alors la forme du **théorème du moment cinétique** :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}}$$

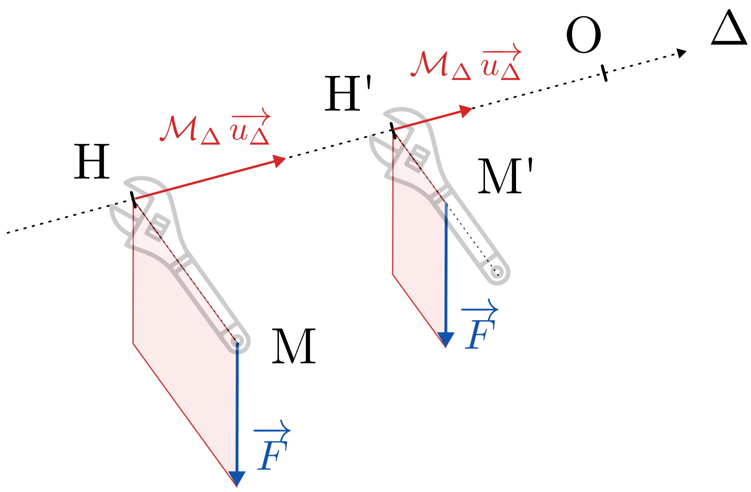
- Ces quantités deviennent particulièrement pertinentes lorsque l'on cherche à décrire des mouvement de rotation du système autour d'un axe Δ. En pratique, on utilise donc souvent la version projetée de ce théorème sur l'axe en question, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_\Delta \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} L_\Delta = \overrightarrow{L_\mathrm{O}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\ \mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}$$

Ce qui présente l'avantage considérable, de ne plus dépendre du choix de O, tant que ce point est inclus dans Δ.

- On appelle **bras de levier** la distance entre l'axe Δ et le système. Plus cette distance est importante, plus le moment exercé sera élevé.

Ci-contre le bras de levier HM *est plus grand que* $\mathrm{H'M'}$*, donc il sera plus simple de mettre en mouvement le système dans la première configuration.*



II Exemples de forces en mécanique du point

A Force de Lorentz

- Une charge q plongé dans un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ subit une **force de Lorentz** :

$$\overrightarrow{F_L} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

- La puissance associée à cette force est donc

$$\mathcal{P}_L = \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{v} = q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{B} \qquad \text{car } \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{v}$$

La puissance reçue du champ magnétique est nulle. On dit donc que la force magnétique **ne travaille pas**.

- Dans le **cas statique** ($\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ indépendants du temps), la force électrique est conservative, et son énergie potentielle associée se met sous la forme

$$E_p = qV$$

Où V est appelé **potentiel électrostatique**.

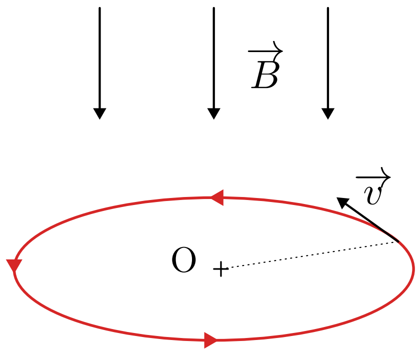
NB : On a alors

$$q\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}\, V \implies \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

- Une particule plongée dans un champ magnétostatique uniforme suit une trajectoire circulaire uniforme :

$$m\,\overrightarrow{a} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \implies \overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Avec $v = \text{cste}$.



B Forces centrales

- On appelle **force centrale** une force, dirigée en permanence vers un point fixe de l'espace. Par commodité, on place l'origine du repère sphérique en ce point, de sorte que

$$\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e_r}$$

- Le moment cinétique d'un système soumis à une force centrale est conservé :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \underbrace{\overrightarrow{\text{OM}}}_{r\,\overrightarrow{e_r}} \wedge F\,\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{0}$$

- **Constance de la direction :** La première conséquence est que le mouvement est plan. En effet $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{\text{OM}} \wedge m\overrightarrow{v} \perp (\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{v})$ donc si sa direction est constante, les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ restent et $\overrightarrow{v}$ dans le même plan. On peut alors se placer en coordonnées cylindriques, de sorte que

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \end{cases} \implies \overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

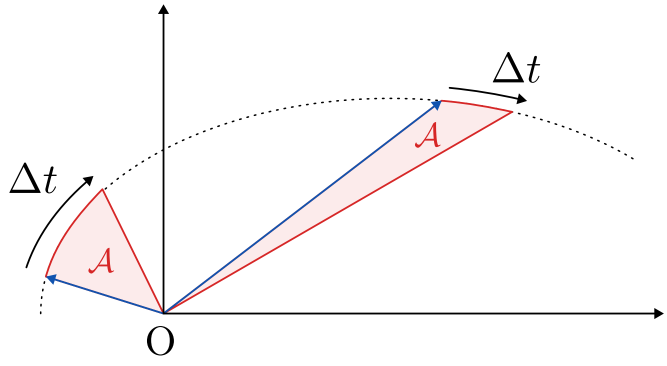
- **Constance de la norme :** la deuxième conséquence est qu'il existe une quantité constante

$$C = r^2\dot\theta$$

Cette grandeur est appelée **constante des aires** car elle est directement reliée à l'aire balayée par unité de temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}||\overrightarrow{L_\mathrm{O}}|| = \frac{1}{2}C$$

Ce principe est connu sous le nom de **loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en des temps égaux est identique.



- Une trajectoire circulaire est nécessairement uniforme :

$$C = r^2\dot\theta = \mathrm{cste}$$

Donc $r = \mathrm{cste} \implies \dot\theta = \mathrm{cste}$.

- Dans le cas d'une force conservative d'énergie potentielle E_p, on peut exprimer l'énergie mécanique uniquement en fonction de $r(t)$ (et pas des autres coordonnées) :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_p^{\mathrm{eff}}(r)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conservative}}}{=} \mathrm{cste}$$

En effet, d'une part l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \vec v = \dot r\, er + r\dot\theta\, \vec{e_\theta}}}{=} = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right) \underset{\substack{\uparrow \\ C = r^2\dot\theta}}{=} \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

D'autre part, l'énergie potentielle E_p est telle que

$$\vec F = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p = F\,\vec{e_r} \implies E_p(r,\theta,z) = E_p(r)$$

C Cas de la force gravitationnelle

- La force gravitationnelle est une force centrale conservative :

$$\vec F = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r} \qquad E_p = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$$

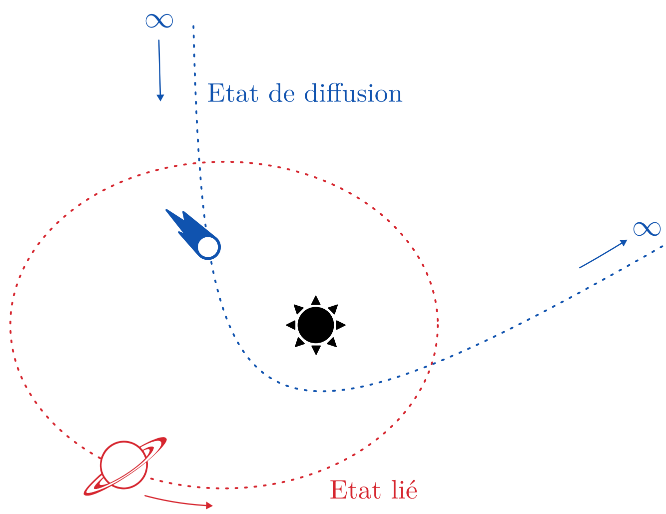
- Dans l'exemple de la force gravitationnelle d'un astre de masse M sur notre système, on a

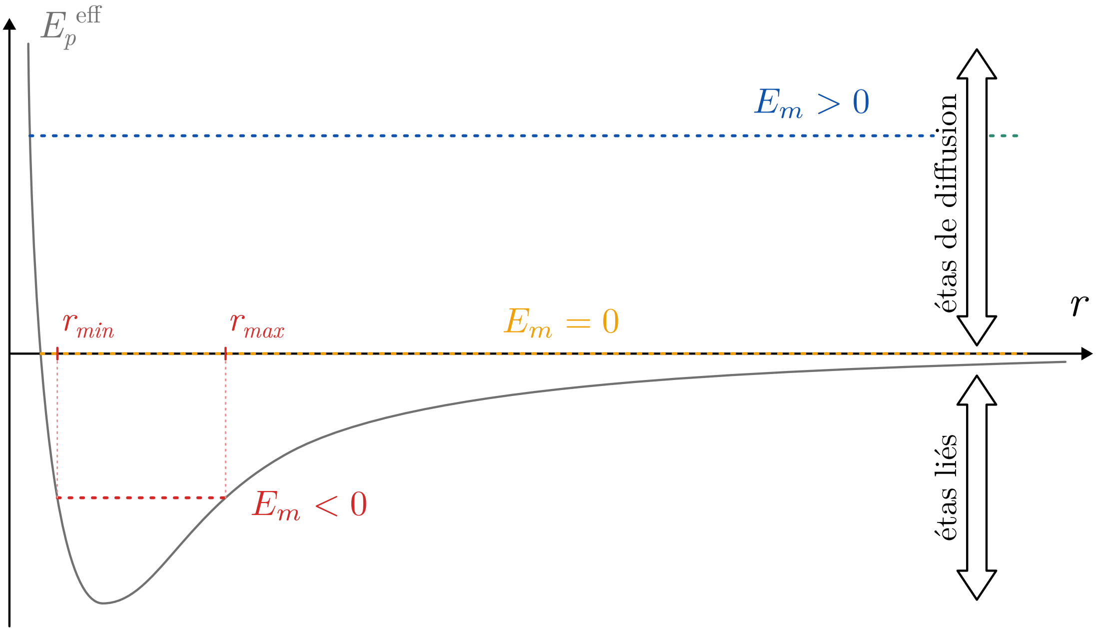
$$E_p^{\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}$$

La valeur de C fixe le tracé et alors suivant celle de E_m, on peut caractériser le mouvement :

État lié : lorsque le mouvement reste borné ($E_m < 0$)

État de diffusion : lorsque r peut tendre vers l'infini ($E_m \geq 0$)





Lois de Kepler :

1. **Loi des orbites :** Les planètes ont des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers
2. **Loi des aires :** Une planète balaye une aire égale en un temps égal
3. **Loi des périodes :** En notant T la période de révolution d'une planète autour du Soleil et a son demi-grand axe, on peut construire une quantité identique pour toutes les planètes :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

- On peut démontrer simplement la troisième loi de KEPLER dans le cadre d'une trajectoire circulaire :

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{F} \\ -mr\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} &= -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} \\ \Longrightarrow\quad \dot{\theta}^2 &= \frac{4\pi^2}{T^2} = \mathcal{G}\frac{M}{r^3} \\ \Longrightarrow\quad \frac{T^2}{r^3} &= \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} = \text{cste} \end{aligned}$$

- Dans le cadre d'une trajectoire circulaire, les énergies sont réparties de la manière suivante :

$$E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p \qquad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$$

Ce qui est généralisable à une orbite elliptique de demi-grand axe a :

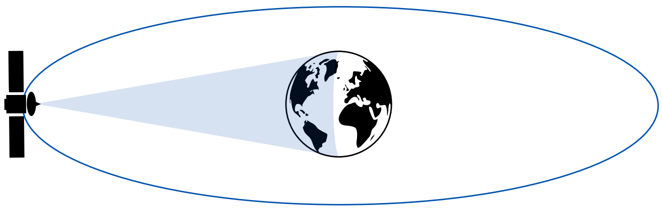
$$E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p \qquad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{Mm}{a}$$

- Trois types de satellites sont à connaître (mission et position)

Satellites géostationnaires :

Mission :
Obtenir des images fixes de loin de la Terre

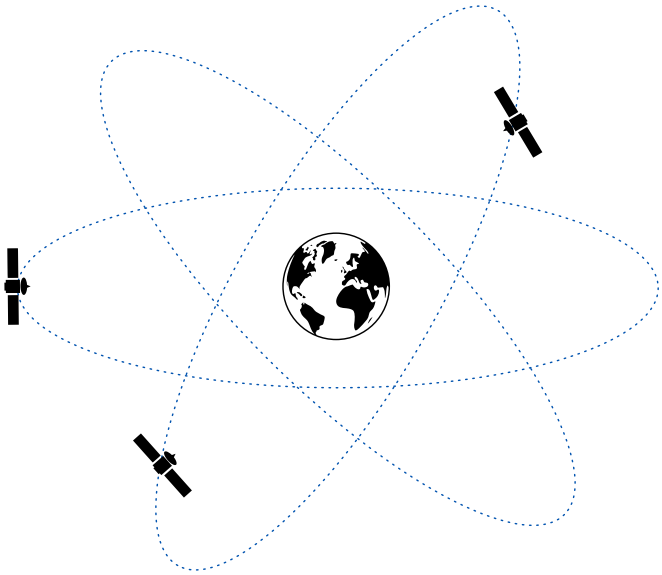
Position :
Environ 36 000 km d'altitude dans le plan équatorial, **fixe** dans le référentiel terrestre

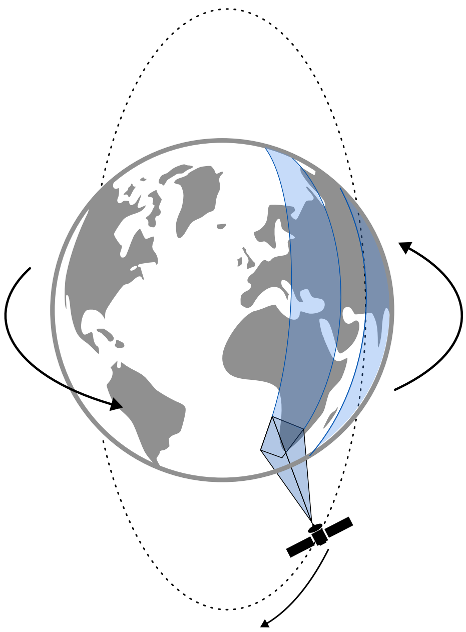


Satellites de localisation :

Mission :
Calculer la position d'un point à la surface du globe (GPS) par triangulation (il faut toujours au moins 3 satellites de localisation dans le ciel visible)

Position :
Environ 20 000 km d'altitude





Satellites circumpolaire :

Mission :
Obtenir des images rapprochées de la Terre

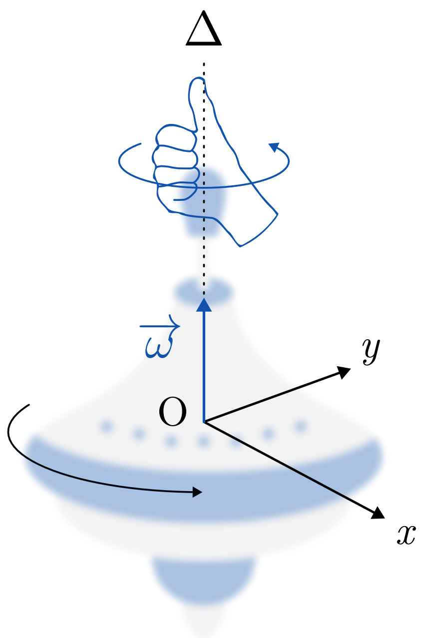
Position :
Environ 700 km d'altitude, dans un plan Nord-Sud

III Mécanique des solides

A Cinématique

- Tous les points d'un solide en translation vont à la même vitesse (notons la $\vec{v}_{\mathrm{A}}$, avec A un point attaché au solide) :

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}} = \overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$$



- Une rotation autour d'un axe Δ est décrite par le vecteur $\vec{\omega}$
  - La norme est la vitesse angulaire de la rotation $(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$
  - La direction est celle de l'axe (orienté par la règle du tire-bouchon de Maxwell)
- Un point M d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour d'un axe incluant un point A a une vitesse

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

- En combinant une translation et une rotation, on peut écrire que

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}} = \overrightarrow{v_{\mathrm{A}}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

- On peut définir le moment cinétique d'un solide. Il se trouve que ce dernier est proportionnelle à $\vec{\omega}$:

$$\overrightarrow{L_{\mathrm{O}}} = J_{\Delta}\,\vec{\omega}$$

  Et la constante de proportionnalité est appelée **moment d'inertie**.
- La valeur du **moment d'inertie** dépend de la répartition de masse : plus celle-ci est excentrée, plus J_{Δ} est grand. Son expression n'est pas au programme, mais permet de comprendre ce résultat :

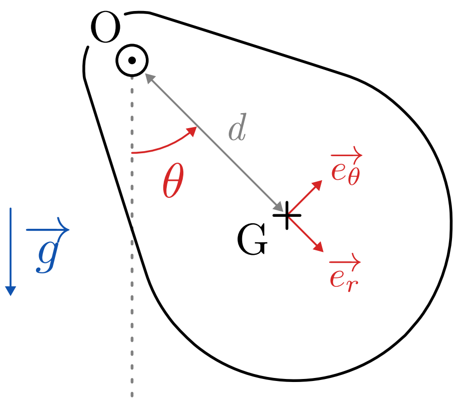
$$J_{\Delta} = \iiint_{\mathcal{V}} r^2 \mathrm{d}m$$

  Avec r la distance entre le point d'intégration M est l'axe Δ.

B Dynamique

- Lorsqu'une action se traduit par un moment non nul mais sans force résultante, on parle de **couple**. C'est le cas par exemple des liaisons pivot, qui ralentissent la rotation, sans déplacer l'objet.
- Une liaison pivot est dite **parfaite** (ou **idéale**) lorsque son couple nul.

Exemple du pendule pesant :



Système : Pendule de masse m et de moment d'inertie par rapport à son axe de rotation J_Δ

Référentiel : Terrestre (supposé galiléen)

Bilan des actions :

- **Poids :** $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$
- **Liaison pivot :** Supposée idéale

Calculons les moments des actions :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{O}}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{\text{OG}} \wedge \overrightarrow{P} = -mgd\sin\theta \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{liaison}} = \overrightarrow{0}$$

On peut alors appliquer le TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{\text{O}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{O}}}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{liaison}}$$
$$J_\Delta\dot{\omega} = -mgd\sin\theta$$

D'où l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$

C Énergie

- En multipliant le TMC par $\overrightarrow{\omega}$, le terme cinématique (de gauche) devient

$$\overrightarrow{\omega} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_\Delta\overrightarrow{\omega}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right)$$

On fait donc apparaître l'**énergie cinétique** du solide en rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

- Le terme dynamique du TMC quant à lui fait donc logiquement apparaître la puissance d'un moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$:

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\omega}$$

- On retrouve alors le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = \mathcal{P}$$

- Dans un solide, les forces intérieures ne travaillent pas (pas de frottements internes). Donc les puissances du théorème précédent ne s'ont qu'extérieures

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = \mathcal{P}_{ext}$$

IV Bonus : comparaison PFD / TMC

Deuxième loi de Newton	Théorème du moment cinétique
Grandeurs d'inertie :	
masse m	(solide) moment d'inertie J_Δ
Grandeurs du mouvement :	
vitesse $\overrightarrow{v}$	vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}$
quantité de mouvement :	moment cinétique en O :
$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{L_\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{p} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solide}}}{=} J_\Delta \overrightarrow{\omega}$
Grandeurs dynamiques :	
résultante des forces $\overrightarrow{F}$	somme des moments en O, $\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}}$
Équation d'évolution :	
$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solide}}}{=} J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t}$
$\downarrow \cdot\overrightarrow{v}$	$\downarrow \cdot\overrightarrow{\omega}$
Énergie cinétique :	
$E_c = \dfrac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2$	$E_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solide}}}{=} \dfrac{1}{2}J_\Delta\overrightarrow{\omega}^2$
Puissance :	
$\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$	$\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\omega}$

Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$$

$$\downarrow \int \dots \mathrm{d}t$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \int \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = W$$